

continuity method による代数学の基本定理の証明

みつば (@mittlear1)

2021 年 9 月 22 日

1 continuity method とは

continuity method とは証明技法の一つであり、おおよそ次の構造をしている。

- ある数学的对象 A に対してある主張を示したいとする。
- この主張が自明に成り立っている対象 B をとってくる。
- B と A とを何らかの意味で (典型的には $[0,1]$ で) 連続的に結ぶ。
- 主張が成り立つパラメータ空間の元全体の集合が開かつ閉であることを示す。

パラメータ空間が連結な場合、開かつ閉な部分集合は空でなければ全体に一致するしかないので、これで証明が終了するというわけである。この手法は大域解析の分野でよく使われるようである。

2 代数学の基本定理

代数学の基本定理の主張をおさらいしておこう。

定理 2.1 $n > 0$ とする。 $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ を複素数係数の n 次多項式とすると、 $f(z) = 0$ は複素数の範囲で必ず解を持つ。

この定理は非常にたくさんの証明が知られている^{*1}が、今回はこの定理を continuity method を使って証明する。

この証明において使用される複素解析の事実は次の命題だけである。

命題 2.2 正則関数 f とその定義域内の点 z_0 について、次の 2 条件は同値である。

- (1) f を \mathbb{R}^2 の開集合から \mathbb{R}^2 への写像と見なしたとき、 z_0 は f の正則点である。
- (2) $f'(z_0) \neq 0$ である。

ここで、 C^∞ 級写像 f の正則点とは Jacobi 行列が全射になるような定義域内の点のことをいう。また、終域の点であって f による逆像が正則点のみからなるものを正則値という。

この命題と整域上の多項式についての一般的性質から次のことが分かる。

^{*1} 複素解析の教科書を見ると各節の終わりごとに練習問題として「○○の定理を使って代数学の基本定理を示せ」と書かれているほどであり、ほとんどサンドバッグがわりに使われている。

命題 2.3 複素係数の n 次多項式 $f(z)$ が定める C^∞ 級関数は高々 $n - 1$ 個の臨界点しか持たない.

証明の実質的な部分にとりかかろう. $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ とおく. これを定理 2.1 が自明に成り立つような n 次多項式と結びたいのであるが, その前に少し工夫をしておく.

補題 2.4 $\alpha \in \mathbb{C}$ をうまくとることで $f(z + \alpha)$ の 1 次項の係数は 0 ではないようにできる.

証明 $f(z + \alpha)$ の 1 次項が 0 になるという条件は α についての $n - 1$ 次方程式で書ける. したがってその解になっていないような α を選べばよい. \square

また, $f(z)$ は 0 を正則値に持つものだけを考察すれば十分である. なぜなら, もし 0 が臨界値ならば $f^{-1}(0)$ が空集合でないからである. $f(z)$ と結ばれる多項式は, $f(z)$ の定数項だけを 0 にした多項式 $g(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z$ である. これらの多項式はもちろん線型なホモトピーで結べるが, あとの目的のためには途中の多項式がどれも 0 を正則値に持っているようにする必要がある.

補題 2.5 C^∞ 級写像 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ を $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = a_0$ かつ任意の $t \in (0, 1)$ で $g(z) + \gamma(t)$ が 0 を正則値に持つようにとれる.

証明 命題 2.3 より $g'(z) = 0$ は高々有限個の解しか持たない. 一方, 定数 $c \in \mathbb{C}$ に対して $g(z) + c$ が 0 を正則値に持たないのは $g(z) + c = 0$ かつ $g'(z) = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ が存在するときに限るので, そのような c は有限個しかない. $(0, 1)$ でそのような点を通らないように γ をとればよい. \square

なお, $t = 1$ の場合は初めから $g(t) + \gamma(t)$ が 0 を正則値に持つようにとっていた. $t = 0$ の場合は 0 が正則値になっているとは限らないが, $z = 0$ は正則点かつ $g(z) + \gamma(0) = 0$ の解である.

この γ を用いて, $F: \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$F(z, t) = g(z) + \gamma(t)$$

とおく. $F(z, 0)$ は $g(z)$ と一致し, $F(z, 1)$ は $f(z)$ と一致する. この F に対して continuity method を実践しよう. $S = \{t \in [0, 1] \mid F(z, t) = 0 \text{ は複素数の範囲で解を持つ}\}$ とおく.

補題 2.6 S は開集合である.

証明 $t_0 \in S$ とする. 仮定から $F(z_0, t_0) = 0$ となる $z_0 \in \mathbb{C}$ が存在する. ただし, $t_0 = 0$ のときは $z_0 = 0$ としておく. t_0 を固定したとき, (z_0, t_0) は $F(z, t_0): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ の正則点である. したがって陰関数定理より t_0 のある近傍の中の t では $F(z, t) = 0$ の解を見つけることができる. \square

補題 2.7 S は閉集合である.

証明 S 内の点列 $\{t_k\}_k$ であって \mathbb{R} の中では収束するものとする. 収束先を t_0 とするとき, $t_0 \in S$ であることを示せばよい. しかし, これは $\{(z, t) \in \mathbb{C} \times [0, 1] \mid F(z, t) = 0\}$ がコンパクトであることから明らかである. \square

以上より $S = [0, 1]$ であることが分かった. したがって特に $f(z) = 0$ は複素数の範囲で解を持つことが分かった.